Aplicações das derivadas

Valores Extremos de funções

Definição

- Seja f uma função de domínio D. Então, f tem valor ***máximo absoluto*** em D em um ponto c se

$$f(x) \leq f(c)$$ para qualquer x em D.

e um valor ***mínimo absoluto*** em D no ponto c se

$$f(x) \geq f(c)$$ para qualquer x em D.

Exemplo 1

- Determine os extremos de $f(x) = x^2$, nos domínios D:

a) $(-\infty, \infty)$

b) [0, 2]

c) (0, 2]

d) (0, 2)

Teorema do Valor Extremo

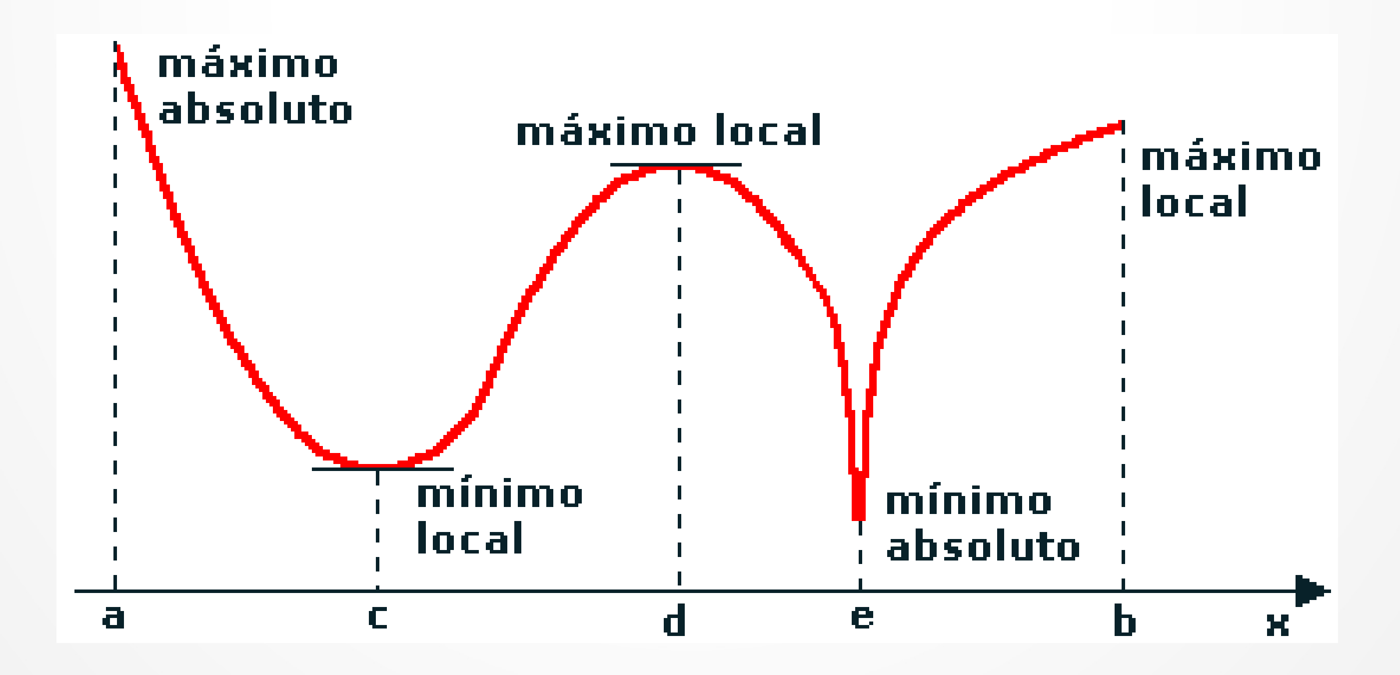
Se uma função f é contínua em um intervalo fechado [a, b], então f toma seu valor máximo e seu valor mínimo ao menos uma vez em [a, b].

Definição

- Uma função f tem um valor ***máximo local*** em um ponto c em seu domínio D se $f(x) \leq f(c)$ para qualquer $x \in D$ em um intervalo aberto que contenha c.
- Uma função f tem um valor ***mínimo local*** em um ponto c em seu domínio D se $f(x) \geq f(c)$ para qualquer $x \in D$ em um intervalo aberto que contenha c.

Observação

- Um máximo absoluto também é um máximo local. Sendo o maior valor de todos, é também o maior valor em uma vizinhança imediata.
- De modo análogo, para o mínimo.



Ponto Crítico

- Definição: Um número c no domínio de uma função f é um ***ponto crítico*** de f se f'(c) = 0 ou f'(c) não existe.
- Exemplo: Determine os números críticos de:

$$a)\, y = \sqrt{x}$$

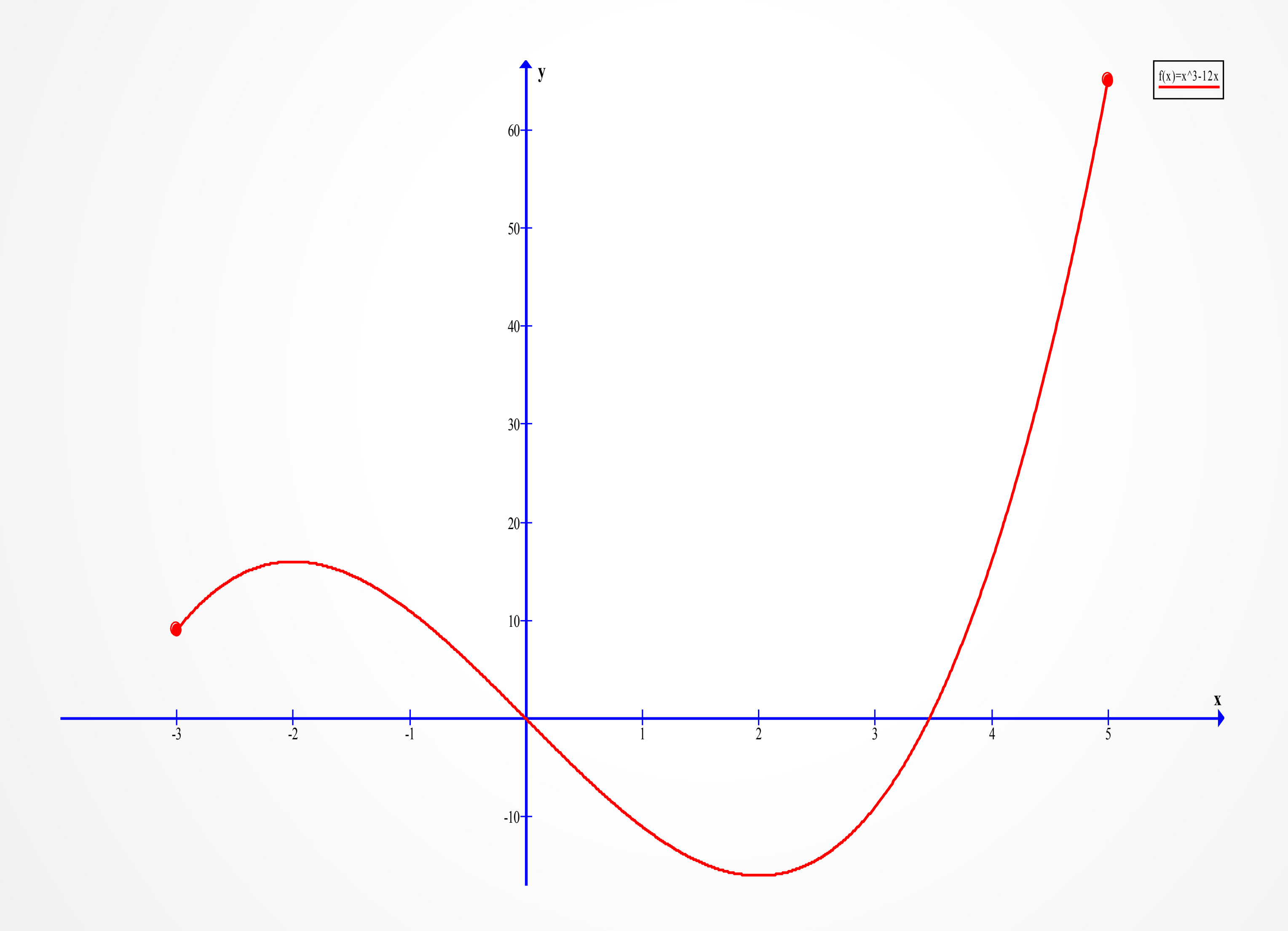
$$b)\, y = \frac{x+2}{(x-1)^2}$$

Diretrizes para determinar os extremos de uma função contínua

- Determine todos os pontos críticos de f em (a, b).
- Calcular f(c) para cada ponto crítico c obtido.
- Calcular os valores extremos f(a) e f(b).
- Os valores máximo e o mínimo de f em [a, b] são o maior e o menor valores da função calculados.

Exemplo 2

- Se $f(x) = x^3 - 12x$, determine os valores máximos e mínimos de f no intervalo fechado [-3, 5] e analise no esboço do gráfico de f.



y
60
50
40
30
20
10
-10
x
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
f(x)=x^3-12x

Exemplo 3

- Determine os números críticos de f se

$$f(x) = (x+5)^2 \sqrt[3]{x-4}$$

Teorema de Rolle

Se f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b) e se $f(a) = f(b)$, então $f'(c) = 0$ para ao menos um número c em (a, b).

Exemplo 4

- Seja $f(x) = 4x^2 - 20x + 29$. Mostre que f satisfaz as hipóteses do teorema de Rolle no intervalo [1, 4].Determine todos os números reais c no intervalo aberto (1, 4) tais que $f'(c) = 0$.

Teorema do Valor Médio

- Se f é contínua em um intervalo fechado [a, b] e derivável no intervalo aberto (a, b), então existe um número c em (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ou equivalentemente,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Exemplo 5

- Se $f(x) = 1/4x^2+1$, mostre que f verifica as hipóteses do teorema do valor médio no intervalo [-1, 4], e determine um número c em (-1, 4) que satisfaz a conclusão do teorema. Ilustre os resultados graficamente.